PHIẾU LUYỆN TẬP

Biến đổi đại số, đẳng thức có điều kiện và hệ phương trình

Họ và tên: ..... Lớp: ..... Ngày: .....

PHẦN I Biến đổi đại số và đẳng thức có điều kiện

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta có các hằng đẳng thức sau:

(H1) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$;

(H2) $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$;

(H3) $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$.

Bài 2. Phân tích x^4+4 thành nhân tử. Áp dụng, giải phương trình $7x^2-10x+14=5\sqrt{x^4+4}$ *(Olympic 30/4 năm 2012)*.

Bài 3. Cho ba số thực a, b, c; đặt $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$. Chứng minh $a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3r$ và $a^4+b^4+c^4=p^4-4p^2q+2q^2+4pr$.

Bài 4. Cho ba số thực a, b, c; đặt $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$ và $S_k=a^k+b^k+c^k$ ($S_0=3$). Chứng minh công thức Newton: với mọi số nguyên $k\geq 3$,

$$S_k=pS_{k-1}-qS_{k-2}+rS_{k-3}.$$

Áp dụng, tính S_2, S_3, S_4, S_5, S_7 theo q, r trong trường hợp $p=0$.

Bài 5. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=6$, $x^3+y^3+z^3=8$. Tính xyz, $x^4+y^4+z^4$ và $x^5+y^5+z^5$.

Bài 6. Cho $x+y=1$ và $xy=-1$. Tính x^5+y^5 và x^7+y^7.

Bài 7. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $a+b+c=0$. Tính $P=\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}$.

Bài 8. Cho $a+b+c=0$. Chứng minh:

a) $2\left(a^4+b^4+c^4\right)=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$;

b) $2\left(a^5+b^5+c^5\right)=5abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$;

c) $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

Bài 9. Phân tích thành nhân tử $A=(a+b-2c)^3+(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3$.

Bài 10. Cho các số thực a, b, c khác 0, $a+b+c \neq 0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^{2027}}+\frac{1}{b^{2027}}+\frac{1}{c^{2027}}=\frac{1}{a^{2027}+b^{2027}+c^{2027}}.$$

Bài 11. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3abc$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right).$$

Bài 12. Cho các số thực x, y, z đôi một khác nhau và khác 0 thỏa mãn $x+\dfrac{1}{y}=y+\dfrac{1}{z}=z+\dfrac{1}{x}$. Chứng minh rằng $x^2y^2z^2=1$.

Bài 13. (Olympic 30/4 năm 2023) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x(x+y)=y(y+z)=z(z+x)\neq 0$. Chứng minh

a) $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}=x+y+z.$

b) $4\left(\dfrac{x^2}{yz}+\dfrac{y^2}{zx}+\dfrac{z^2}{xy}\right)-\left(\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{z^3}+\dfrac{z^3}{x^3}\right)=9.$

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=5 \\ x^3+y^3+z^3=9. \end{cases}$

Bài 15. (Olympic 30/4 năm 2008) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y-z=7 \\ x^2+y^2-z^2=37 \\ x^3+y^3-z^3=1. \end{cases}$

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+1=2y \\ y^2+1=2z \\ z^2+1=2x. \end{cases}$

Bài 17. (Olympic 30/4 năm 2021) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} x^2-1=y+1 \\ y^2-1=z+1 \\ z^2-1=x+1. \end{cases}$ Chứng minh $x+y+z$ là số nguyên.

Bài 18. Chứng minh rằng $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ là số nguyên chẵn với mọi số tự nhiên n.

Bài 19. (Olympic 30/4 năm 1999) Cho x là số thực sao cho x^3-x và x^4-x đều là các số nguyên. Chứng minh rằng x cũng là số nguyên.

Bài 20. Cho $x+y=3$ và $xy=1$. Tính x^2+y^2, x^3+y^3 và x^5+y^5.

Bài 21. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=4$, $ab+bc+ca=5$, $abc=2$. Tính $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$, $(a+b)(b+c)(c+a)$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

Bài 22. Phân tích thành nhân tử $A=(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$.

Bài 23. Phân tích thành nhân tử $B=x^3+y^3+1-3xy$.

Bài 24. Phân tích x^4+4y^4 thành nhân tử. Chứng minh rằng n^4+4 là hợp số với mọi số nguyên $n>1$.

Bài 25. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $a+b+c=0$. Tính $P=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.

Bài 26. Biểu diễn theo $p = a+b+c$, $q = ab+bc+ca$, $r = abc$ các biểu thức

$$A = ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a), \qquad B = (ab+bc)(bc+ca)(ca+ab).$$

Bài 27. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x+y+z = 0$ và $x^2+y^2+z^2 = 6$. Tính $x^4+y^4+z^4$.

Bài 28. Cho $a+b+c = 0$. Chứng minh rằng $a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3 = 0$.

Bài 29. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $\dfrac{a+b-c}{c} = \dfrac{b+c-a}{a} = \dfrac{c+a-b}{b}$. Tính $P = \dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.

Bài 30. Cho $a+b+c = 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7} = \frac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Bài 31. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 = 3a^2b^2c^2$. Tính $P = \left(1+\dfrac{a}{b}\right)\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\left(1+\dfrac{c}{a}\right)$.

Bài 32. Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b} = 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

Bài 33. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x^3+y^3+z^3 = 1. \end{cases}$ Từ đó tính $x^{2027}+y^{2027}+z^{2027}$.

Bài 34. Cho $a+b+c = 0$ và $a^2+b^2+c^2 = 1$. Tính $a^4+b^4+c^4$.

Bài 35. Cho các số thực a, b, c khác -1. Chứng minh rằng

$$a+b+c+2 = abc \Leftrightarrow \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c} = 1.$$

Bài 36. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z = 6 \\ xy+yz+zx = 11 \\ x^3+y^3+z^3 = 36. \end{cases}$

Bài 37. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y = 2 \\ x^5+y^5 = 32. \end{cases}$

Bài 38. Cho các số thực a, b, c khác 0, $a+b+c \neq 0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a+b+c}$. Tính

$$Q = \left(a^{2027}+b^{2027}\right)\left(b^{2027}+c^{2027}\right)\left(c^{2027}+a^{2027}\right).$$

Bài 39. Cho các số thực x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn $x^2-2y = y^2-2z = z^2-2x$. Chứng minh rằng $(x+y)(y+z)(z+x) = 8$.

Bài 40. Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 0$. Chứng minh rằng $2\left(a^4+b^4+c^4\right)$ là số chính phương.

Bài 41. Giải phương trình $(x-1)^3+(2x-3)^3 = (3x-4)^3$.

Bài 42. Cho ba số thực a, b, c đôi một khác nhau, khác 0 và thỏa mãn $a+\dfrac{1}{b} = b+\dfrac{1}{c} = c+\dfrac{1}{a} = t$. Tìm t.

Bài 43. Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau, khác 0 và $a+b+c=0$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9.$$

Bài 44. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=6$ và $ab+bc+ca=9$. Chứng minh rằng $0\le a\le 4$, $0\le b\le 4$, $0\le c\le 4$.

Bài 45. Cho các số thực x, y sao cho $x+y$, x^2+y^2 và x^4+y^4 đều là số nguyên. Chứng minh rằng x^n+y^n là số nguyên với mọi số nguyên dương n.

Bài 46. Cho a, b, c là ba số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1;$

b) $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c.$

Bài 47. (Olympic 30/4 năm 2002) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2}\left(x_2+\dfrac{1}{x_2}\right)\\ x_2=\dfrac{1}{2}\left(x_3+\dfrac{1}{x_3}\right)\\ \cdots\\ x_{2002}=\dfrac{1}{2}\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right). \end{cases}$$

Bài 48. (Olympic 30/4 năm 2005) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2(y+z)^2=\left(3x^2+x+1\right)y^2z^2\\ y^2(z+x)^2=\left(4y^2+y+1\right)z^2x^2\\ z^2(x+y)^2=\left(5z^2+z+1\right)x^2y^2. \end{cases}$$

Bài 49. (Olympic 30/4 năm 1998) Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax^2+bx+c=0\\ bx^2+cx+a=26\\ cx^2+ax+b=-26 \end{cases}$ với $abc\neq 0$. Tìm các số nguyên a, b, c để hệ phương trình có nghiệm nguyên.

PHẦN II Hệ phương trình

Bài 50. Phân tích thành nhân tử $2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1$.

Bài 51. (Olympic 30/4 năm 2026) Tìm tất cả các số thực $x>0, y>0, z>0$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x(x-3)+2y(y-3)-9z=0,\\ x(2x-9)-12y+z(z-15)=0,\\ -6x+y(y-9)+2z(z-6)=0. \end{cases}$$

Bài 52. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+3xy^2=-49\\ x^2-8xy+y^2=8y-17x. \end{cases}$

Bài 53. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9\\ x^2-4xy+5y^2=5. \end{cases}$

Bài 54. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3\left(y^2 + 1\right). \end{cases}$

Bài 55. (Olympic 30/4 năm 2007) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{8xy}{x+y} = 16 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y. \end{cases}$

Bài 56. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y. \end{cases}$

Bài 57. (Olympic 30/4 năm 2010) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 9 \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right) = 18. \end{cases}$

Bài 58. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 9. \end{cases}$

Bài 59. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y = x^3 + x - 1 \\ z = y^3 + y - 1 \\ x = z^3 + z - 1. \end{cases}$

Bài 60. (Đề kiểm tra đội tuyển lần 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 11x - 6 = 6y^2 \\ y^3 + 11y - 6 = 6z^2 \\ z^3 + 11z - 6 = 6x^2. \end{cases}$

Bài 61. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y = 2 \\ y^3 + z = 2 \\ z^3 + x = 2. \end{cases}$

Bài 62. (Olympic 30/4 năm 2019) Giải hệ phương trình sau với $x, y, z \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = y^2 + 1 \\ y + \dfrac{1}{y} = z^2 + 1 \\ z + \dfrac{1}{z} = x^2 + 1. \end{cases}$

Bài 63. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + yz + zx = 3. \end{cases}$

Bài 64. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = y \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2} = z \\ \dfrac{2z^2}{1+z^2} = x. \end{cases}$

Bài 65. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 21. \end{cases}$

Bài 66. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(4x^2 + 1\right)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7. \end{cases}$

Bài 67. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

Bài 68. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 16 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8. \end{cases}$

Bài 69. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7. \end{cases}$

Bài 70. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x + y + 1) + y(y + 1) = 2. \end{cases}$

Bài 71. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{2} \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{25}{4}. \end{cases}$

Bài 72. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = x - y \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Bài 73. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$

Bài 74. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y = x^3 + 2x - 2 \\ z = y^3 + 2y - 2 \\ x = z^3 + 2z - 2. \end{cases}$

Bài 75. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \\ x + 2y + 3z = 12. \end{cases}$

Bài 76. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 4y = -7 \\ y^2 - 6z = -14 \\ z^2 - 2x = 7. \end{cases}$

Bài 77. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = 35 \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y. \end{cases}$

Bài 78. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases}$

Bài 79. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5\left(1 + x^2\right). \end{cases}$

Bài 80. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

Bài 81. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 1 + y(y + x) = 4y \\ \left(x^2 + 1\right)(y + x - 2) = y. \end{cases}$

Bài 82. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2z \\ z^3 + 1 = 2x. \end{cases}$

Bài 83. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 12. \end{cases}$

Bài 84. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x = 2 - y^2 \\ y = 2 - x^2. \end{cases}$

Bài 85. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + x = y^3 + 3y^2 + 4y + 2 \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

Bài 86. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 2 \\ \dfrac{yz}{y+z} = 3 \\ \dfrac{zx}{z+x} = 4. \end{cases}$

Bài 87. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $y(x+1) = 6$, $z(y+1) = 6$, $x(z+1) = 6$. Tìm x, y, z.

Bài 88. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2+y^2)\left(1 + \dfrac{1}{x^2y^2}\right) = 9. \end{cases}$

Bài 89. (Olympic 30/4 năm 2000) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(3 - \dfrac{5}{y+42x}\right)\sqrt{2y} = 4 \\ \left(3 + \dfrac{5}{y+42x}\right)\sqrt{x} = 2. \end{cases}$

Bài 90. (Olympic 30/4 năm 2016) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt[3]{4(x^2+x)} + 2\sqrt{2y^2 - y} = 3(x+y) + 2 \\ 2016\sqrt{y-1} + y^2 + 2 = x + 2y. \end{cases}$

Bài 91. (Olympic 30/4 năm 2017) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x + 6y + 3)\sqrt{xy + 3y} = y(3x + 8y + 9) \\ \sqrt{-x^2 + 8x - 24y + 417} = (y+3)\sqrt{y-1} + 3y + 17. \end{cases}$

Bài 92. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x-2) + y(y-4) - z = 0 \\ y(y+2) + z(z-7) + 4 = 0 \\ y(y-1) + z(z-4) - x + 2 = 0 \end{cases}$ với $x, y, z > 0$.

Bài 93. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^4 + y^4 + z^4 = xyz(x+y+z). \end{cases}$

Bài 94. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 1 \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$

Bài 95. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{7-y} = 4 \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{7-x} = 4. \end{cases}$

Bài 96. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{5} \\ 4x^2 + 3x - \dfrac{57}{25} = -y(3x+1). \end{cases}$